OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 10.02.2024

CLASA a XII - a

BAREM DE CORECTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

Problema 1

a) Calculați: $\int \frac{1}{x^{2024}+x}\,dx, x > 0.$

b) Să se calculeze $I = \int_0^{2n+1} \frac{x+\sin(\pi x)}{2n+1+2\sin(\pi x)}dx, n \in N^*$

Soluție:

a) $\int \frac{1}{x^{2024}+x}\,dx = \int \frac{1}{x(x^{2023}+1)}\,dx = \int \frac{x^{2022}}{x^{2023}(x^{2023}+1)}\,dx = I$…………………..…………..1p)

$x^{2023} = t, t > 0 \Rightarrow x^{2022}dx = \frac{1}{2023}dt$ ....……………………………………………1p)

$$I = \frac{1}{2023}\int \frac{1}{t(t+1)}\,dt = \frac{1}{2023}\left(\int \frac{1}{t}dt - \int \frac{1}{t+1}dt\right) = \frac{1}{2023}\ln\frac{t}{t+1} + C, \qquad C \in R.$$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2023}\ln\frac{x^{2023}}{x^{2023}+1} + C,\ C \in R$ ....…………………………………………………….………1p)

b) Notăm $2n + 1 - x = t \Rightarrow dx = -dt$

$x = 0 \Rightarrow t = 2n + 1$ şi $x = 2n + 1 \Rightarrow t = 0$...1p)

$I = -\int_{2n+1}^{0} \frac{2n+1-t+\sin\pi(2n+1-t)}{2n+1+2\sin\pi(2n+1-t)}dt = \int_0^{2n+1} \frac{2n+1-t+\sin\pi t}{2n+1+2\sin\pi t}dt$…………………..……….……...1p)

$$2I = \int_0^{2n+1} \frac{x+\sin(\pi x)}{2n+1+2\sin(\pi x)}dx + \int_0^{2n+1} \frac{2n+1-x+\sin\pi x}{2n+1+2\sin\pi x}dx$$
$$= \int_0^{2n+1} \frac{2n+1+2\sin\pi x}{2n+1+2\sin\pi x}dx = \int_0^{2n+1} 1\,dx = 2n+1, n \in N^*$$

$\Rightarrow I = \frac{2n+1}{2}, n \in N^*$…………………………………………………………….………..2p)

…………………………………………………………………………………………

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Problema 2

Să se arate că:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2024}x + \cos^2 x}{\sin^{2024}x + \cos^{2024}x + 1}\,dx < \lim_{n\to\infty} n\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{x^2}\,dx.$$

Soluție:

Notăm $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2024}x+\cos^2 x}{\sin^{2024}x+\cos^{2024}x+1}dx$ şi $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2024}x+\sin^2 x}{\sin^{2024}x+\cos^{2024}x+1}dx$. ……………..………1p)

Atunci $I + J = \frac{\pi}{2}$ şi $x = \frac{\pi}{2} - t$ conduce la $I = J$, deci $I = \frac{\pi}{4}$. ……………………….……..…..2p)

Dacă $x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, avem: $n^2\sin x \le \frac{\sin x}{x^2} \le (n+1)^2\sin x$……………………..…………..1p)

$$n^2\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \sin x\,dx \le \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{x^2}dx \le (n+1)^2\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \sin x\,dx \Rightarrow$$

$$-n^2\left(\cos\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n+1}\right) \le \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{x^2}dx \le -(n+1)^2\left(\cos\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n+1}\right) \Rightarrow$$

$$2n^3\sin\frac{1}{2n(n+1)}\sin\frac{2n+1}{2n(n+1)} \le n\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{x^2}dx \le 2(n+1)^2 n\sin\frac{1}{2n(n+1)}\sin\frac{2n+1}{2n(n+1)}$$ ……….....1p)

$$\lim_{n\to+\infty} 2n^3\sin\frac{1}{2n(n+1)}\sin\frac{2n+1}{2n(n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{2n(n+1)}}{\frac{1}{2n(n+1)}} \cdot \frac{\sin\frac{2n+1}{2n(n+1)}}{\frac{2n+1}{2n(n+1)}} \cdot \frac{1}{2n(n+1)} \cdot \frac{2n+1}{2n(n+1)} \cdot 2n^3 = 1$$

Analog

$\lim_{n\to+\infty} 2(n+1)^2 n\sin\frac{1}{2n(n+1)}\sin\frac{2n+1}{2n(n+1)} = 1$……………………….……………..……1p)

Obţinem

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{x^2}dx = 1$$

Cum $\frac{\pi}{4} < 1$, rezultă inegalitatea cerută……………………………………..…………………1p)

Problema 3

Fie $k \in (1, +\infty)$ şi $G = \left(-\infty, \frac{k^2-1}{k}\right] \cup \left[\frac{k^2+1}{k}, +\infty\right)$.

Se consideră operaţia $x * y = kxy - k^2(x + y) + k^3 + k$, oricare $x, y \in G$.

a) Să se demonstreze că $t \in G$ dacă şi numai dacă $|t - k| \geq \frac{1}{k}$, $(\forall)\ k \in (1, +\infty)$.
b) Arătaţi că " $*$ " este lege de compoziţie pe G.
c) Studiaţi existenţa elementului neutru şi a elementelor simetrizabile.

Soluție:

a) $t \in G \Leftrightarrow t \in \left(-\infty, \frac{k^2-1}{k}\right] \cup \left[\frac{k^2+1}{k}, +\infty\right) \Leftrightarrow t - k \in \left(-\infty, \frac{-1}{k}\right] \cup \left[\frac{1}{k}, +\infty\right)$
$\Leftrightarrow |t - k| \geq \frac{1}{k}$, $(\forall)\ k \in (1, +\infty)$……………………………..……………………1p

b) Fie $x, y \in G \Rightarrow |x - k| \geq \frac{1}{k}$ și $|y - k| \geq \frac{1}{k} \Rightarrow |(x - k)(y - k)| \geq \frac{1}{k^2}$………………1p)
$\Rightarrow |xy - kx - ky + k^2| \geq \dfrac{1}{k^2} \Rightarrow |kxy - k^2(x + y) + k^3| \geq \dfrac{1}{k} \Rightarrow$
$\Rightarrow |kxy - k^2(x + y) + k^3 + k - k| \geq \frac{1}{k} \Rightarrow |x * y - k| \geq \frac{1}{k} \Rightarrow x * y \in G$……………….1p)

c) Fie $e \in G$ astfel încât $e * x = x * e = x$, $(\forall)x \in G$.
$x * e = x$, $(\forall)x \in G \Rightarrow kxe - k^2(x + e) + k^3 + k = x, (\forall)x \in G \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - k)(ke - k^2 - 1) = 0, (\forall)x \in G$………………………………………………...1p)
$\Rightarrow ke - k^2 - 1 = 0 \Rightarrow e = k + \dfrac{1}{k} \in G.$

Cum legea " $*$ " este comutativă $\Rightarrow e = k + \frac{1}{k}$ este element neutru…………………..……….1p)
$x \in G$ simetrizabil $\Leftrightarrow (\exists)\ x' \in G$ astfel încât $x' * x = x * x' = e$.

$x * x' = e \Leftrightarrow kxx' - k^2(x + x') + k^3 + k = k + \dfrac{1}{k} \Rightarrow\ k^2xx' - k^3(x + x') + k^4 - 1 = 0$

$\Rightarrow x'k^2(x - k) = k^3x - k^4 + 1 \overset{x \neq k}{\Longrightarrow} x' = \frac{k^3x-k^4+1}{k^2(x-k)} \Rightarrow x' - k = \frac{k^3x-k^4+1}{k^2(x-k)} - k$

$\Rightarrow x' - k = \frac{1}{k^2(x-k)}, x \in G, x \neq k, k > 1$ ….……………………………………………….…1p)

Dar $x' \in G \Rightarrow |x' - k| \geq \frac{1}{k} \Rightarrow \left|\frac{1}{k^2(x-k)}\right| \geq \frac{1}{k} \Rightarrow |x - k| \leq \frac{1}{k}$

Cum $|x - k| \geq \frac{1}{k}$ și $|x - k| \leq \frac{1}{k} \Rightarrow |x - k| = \frac{1}{k} \Rightarrow x = k \pm \frac{1}{k} \in G$ sunt singurele elemente simetrizabile………………………………………………………………………………1p)

Problema 4

Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a, b, c \in G$, care au proprietatea că $a^k b^k = c^k$, pentru orice $k \in \{3, 4, 5\}$. Demonstrați că $ab = c = ba$.

Supliment Gazeta Matematică nr. 10/2022

Soluție:

$a^3b^3 = c^3,\ a^4b^4 = c^4,\ a^5b^5 = c^5$……………………………………………………………1p)

$c^4 = c^3c = a^3b^3c \Rightarrow a^4b^4 = a^3b^3c \Rightarrow ab^4 = b^3c$…………………………………………1p)

$c^5 = c^4c = a^4b^4c \Rightarrow a^5b^5 = a^4b^4c \Rightarrow ab^5 = b^4c$……………………………………….1p)

$b^4c = ab^5 = ab^4b = b^3cb \Rightarrow b^4c = b^3cb \Rightarrow bc = cb$…………………………..…………1p)

$ab^4 = b^3c = b^2bc = b^2cb = bbcb = bcbb = cbbb = cb^3 \Rightarrow ab = c$…………………1p)

$ab = c \Rightarrow bab = bc \Rightarrow bab = cb \Rightarrow ba = c$……………………………………………………1p)

Deci $ab = c = ba$ ...……………………………………………………..………………1p)