OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 10.02.2024

CLASA a X - a

BAREM DE CORECTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

Problema 1

Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care satisfac relația $3f\left(\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{y}}{3}\right)-f^2\left(\sqrt[3]{xy}\right)\geq\frac{9}{4}$.

a)Arătați că $\sqrt[3]{xy}\leq\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{y}}{3}, \forall x,y\geq 0.$ În ce caz avem egalitate?

b) Există funcții injective care satisfac inegalitatea dată?

Soluție:

a)Luăm $a=\sqrt{xy}, b=\sqrt{x}, c=\sqrt{y}$ ……………………………..…………………1p

înlocuind în inegalitatea mediilor $\sqrt[3]{abc}\leq\frac{a+b+c}{3}$ rezultă relația…………………………..1p

Egalitatea are loc dacă si numai dacă $a=b=c$ adică $\sqrt{xy}=\sqrt{x}=\sqrt{y}$ de unde

$x=y=0, x=y=1$ …………………………………………………………………….…..1p

b) Pentru $x=y=0$ avem $3f(0)-f^2(0)\geq\frac{9}{4}$ ……………………………………….……..1p

$\Leftrightarrow\left(f(0)-\frac{3}{2}\right)^2\leq 0\Leftrightarrow f(0)=\frac{3}{2}(1)$ ……………………………………………………….....1p

Pentru $x=y=1$ obținem $f(1)=\frac{3}{2}(2)$ 1p

Din (1) și (2) rezultă că nu există funcții injective care să verifice inegalitatea din enunț ..1p

MINISTERUL EDUCAŢIEI

Problema 2

Fie $a,b,c \in (1,\infty)$ și $x=\log_{bc} a,\ \ y=\log_{ca} b,\ \ z=\log_{ab} c.$

a) Arătați că $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=2.$

b) Demonstrați că $a^{(x+1)(y-z)}\cdot b^{(y+1)(z-x)}\cdot c^{(z+1)(x-y)}=1.$

G.M Supliment – octombrie 2022

Soluție:

a) $x+1=\log_{bc} a+\log_{bc} bc=\log_{bc} abc, \frac{1}{x+1}=\frac{1}{\log_{bc} abc}=\log_{abc} bc$ ………………………..1p

Analog $\frac{1}{y+1}=\frac{1}{\log_{ca} abc}=\log_{abc} ca, \frac{1}{z+1}=\frac{1}{\log_{ab} abc}=\log_{abc} ab$ 1p

$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=\log_{abc} bc+\log_{abc} ca+\log_{abc} ab=\log_{abc}(abc)^2=2$ 1p

b) $a^{(x+1)(y-z)}\cdot b^{(y+1)(z-x)}\cdot c^{(z+1)(x-y)}=a^{(\log_{bc} abc)(\log_{ca} b-\log_{ab} c)}\cdot b^{(\log_{ca} abc)(\log_{ab} c-\log_{bc} a)}\cdot c^{(\log_{ab} abc)(\log_{bc} a-\log_{ca} b)}$

$=a^{(\log_a abc)(\log_{bc} a)(\log_{ca} b-\log_{ab} c)}\cdot b^{(\log_b abc)(\log_{ca} b)(\log_{ab} c-\log_{bc} a)}\cdot c^{(\log_c abc)(\log_{ab} c)(\log_{bc} a-\log_{ca} b)}$ …………………..1p

$=\left(a^{\log_a abc}\right)^{(\log_{bc} a)(\log_{ca} b-\log_{ab} c)}\cdot\left(b^{\log_b abc}\right)^{(\log_{ca} b)(\log_{ab} c-\log_{bc} a)}\cdot\left(c^{\log_c abc}\right)^{(\log_{ab} c)(\log_{bc} a-\log_{ca} b)}$ …..…………1p

$=(abc)^{(\log_{bc} a)(\log_{ca} b-\log_{ab} c)}\cdot(abc)^{(\log_{ca} b)(\log_{ab} c-\log_{bc} a)}\cdot(abc)^{(\log_{ab} c)(\log_{bc} a-\log_{ca} b)}$ ………………….……1p

$=(abc)^0=1$ ……………………………………………………………………….……1p

Problema 3

Fie numărul complex z astfel încât $z^2-2z\cos\alpha+1=0, \alpha\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că $|z|=1$.

b) Demonstrați că $\sum_{k=1}^{n}\left(z^k+\frac{1}{z^k}\right)=2\frac{\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Soluție:

a) Soluțiile ecuației sunt $z_{1,2}=\cos\alpha\pm i\sin\alpha$ ……………………………………………….…..1p

$|z_1|=|z_2|=1$……………………………………………………………...…………………….…..1p

b) Avem $\sum_{k=1}^{n}\left(z^k+\frac{1}{z^k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(z_1{}^k+z_2{}^k\right)=2\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha$ …………………...…………………….…1p

Notam $S_1=\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha, S_2=\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha$, atunci $S_1+iS_2=\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha+i\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha$, ……………...1p

$$=\sum_{k=1}^{n}(\cos\alpha+i\sin\alpha)^k=\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)\left[(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n-1\right]}{\cos\alpha+i\sin\alpha-1}$$

$$=\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos n\alpha+i\sin n\alpha-1)}{\cos\alpha+i\sin\alpha-1}$$ ……………………..…………………………………..1p

Dar $\cos\beta+i\sin\beta-1=2\sin\frac{\beta}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\beta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\right]$………………………………..1p

$$S_1+iS_2=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}+i\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\right)\Rightarrow S_1=\frac{\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Finalizare………………………………………………………………… ,…………….1p

Problema 4

În planul complex se consideră trunghiul ABC cu $A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ și punctele M, N, P pe laturilor $(AB),(AC)$ respectiv (BC), astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{n}, \frac{AN}{NC} = n$ și $BP = \frac{1}{n} PC,\ n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $G(z_G)$ este centrul de greutate al triunghiului ABC, $H(z_H)$ este ortocentrul triunghiului MNP iar $O_1(z_{O_1})$ centrul cercului circumscris triunghiului MNP, arătați că $3z_G + 2z_{o_1} = z_{H}.$

Soluție:

a) $z_M = \dfrac{z_A + \frac{1}{n} z_B}{1 + \frac{1}{n}} = \dfrac{n}{n+1} z_A + \dfrac{1}{n+1} z_B$ 2p

Analog $z_N = \dfrac{1}{n+1} z_A + \dfrac{n}{n+1} z_c, z_P = \dfrac{n}{n+1} z_B + \dfrac{1}{n+1} z_c$ 1p

Adunând membru cu membru cele trei relații, obținem

$z_M + z_N + z_P = z_A + z_B + z_C$ 1p

Ținem seama că $z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$ (afixul centrului de greutate) și că $z_H = z_M + z_N + z_P - 2z_{o_1}$

(relația lui Sylvester) 2p

$\Rightarrow 3z_G + 2z_{o_1} = z_{H.}$ 1p